8.2.10 Užití geometrických posloupností

Předpoklady: 8207, 8208

Pedagogická poznámka: Tři příklady v této hodině nezaberou 45 minut, původně jsem předpokládal, že jejich řešení bude trvat maximálně 20 minut a zbytek hodiny bude možné věnovat následující hodině 8210. Bohužel došlo k jednomu z nejnečekanějších překvapení. Druhý příklad počítali studenti s ohromnými problémy, i ti nejlepší z nich se neustále snažili místo výpočtu a_n určit s_n jako v příkladě 1.
Původně jsem zařazoval příklad 2 jako druhý kvůli použití logaritmů při výpočtu času nutného k jejich namnožení. Zkušenost, kterou jsem udělal se studenty, je podle mě dalším argumentem pro zachování tohoto pořadí.

Př. 1: O vynálezci šachů se traduje zajímavá legenda. Když se s jeho vynálezem seznámil tehdejší čínský císař, novou hru si velice zamiloval. Pozval proto vynálezce k sobě a nabídl mu jako odměnu cokoliv si bude přát. Vynálezce se chvíli zamyslel a pak požádal císaře o trochu rýže. Šachovnice má 64 polí. Za první políčko chtěl dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnek a tak dále. Za každé další políčko chtěl dvojnásobný počet zrníček než za políčko předchozí. Císař byl velmi udiven jeho skromností a nabízel mu cennější odměnu. Odhadni počet zrníček, které vynálezce po císaři žádal. Kolik by to bylo kg? Urči počet zrníček výpočtem. Urči jejich hmotnost v kg, pokud 1 kg rýže tvoří přibližně 30 000 zrnek.

Počty zrnek na jednotlivých políčkách tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, …
$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$ (64 políček šachovnice)

Určíme součet: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \doteq 1{,}8 \cdot 10^{19}$

Hmotnost zrnek v kg: $\frac{1{,}8 \cdot 10^{19}}{30000} = 6{,}1 \cdot 10^{14}\ \text{kg}$

Pro srovnání celosvětová roční produkce rýže je $5 \cdot 10^{11}\ \text{kg}$.

Pedagogická poznámka: Studentské odhady jsou v naprosté většině případů menší než 1 kg.

Př. 2: Bakterie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik bakterií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den? Jak dlouho by trvalo, než by hmotnost bakterií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné bakterie je přibližně $6 \cdot 10^{-15}\ \text{kg}$. Hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$.

Počty bakterií tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, ..
$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 25$ (první člen je po 0 hodinách jediná bakterie na začátku pokusu)
použijeme vzorec pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{25} = 1 \cdot 2^{24} = 16776216$

Za jak dlouho by bakterie vážily stejně jako Země:

Potřebný počet bakterií: $\frac{6\cdot 10^{24}}{6\cdot 10^{-15}}=10^{39}$ $\Rightarrow$ toto musí být hodnota hledaného *n*-tého členu posloupnosti

$a_n=a_1q^{n-1}\Rightarrow 10^{39}=2^{n-1}$ - musíme logaritmovat

$\log 10^{39}=\log 2^{n-1}$

$39\cdot\log 10=(n-1)\log 2$

$n-1=\frac{39}{\log 2}$

$n=\frac{39}{\log 2}+1=130,6$ $\Rightarrow$ 131 člen posloupnosti $\Rightarrow$ po 130 hodinách

Přibližně po 130 hodinách (přesněji po 129,6 hodinách, tedy 5,4 dne) by bakterie vážily více než Země.

Pedagogická poznámka: Oba předchozí příklady jsou pouze teoretické, protože není možné je prakticky realizovat právě kvůli rychlosti, kterou se hodnoty posloupnosti zvětšují (geometrická posloupnost je speciální případ exponenciální funkce, která je nejrychleji rostoucím typem funkce). Exponenciální děje s kladnou zpětnou vazbou (čím větší hodnota, tím rychlejší růst) se v přírodě vyskytují vzácně právě proto, že velmi rychle spotřebují všechny zdroje.

Př. 3: Počet HIV pozitivních občanů ČR republiky dosahoval na počátku roku 2007 přibližně 1000 osob (jedná se o osoby pozitivně testované s prokázaným virem, ne o odhady, které jsou až 10x vyšší). Při testování bylo v průběhu roku 2007 objeveno 122 nově nakažených. Kolik procent HIV pozitivních přibylo v roce 2007? Urči počet HIV pozitivních na počátku roku 2015, pokud by šíření nemoci postupovalo stejným tempem. Kolik nakažených by za tohoto předpokladu bylo na počátku roku 2050?

1000 … 100%
122 … x %

$\frac{x}{122}=\frac{100}{1000}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{100}{1000}\cdot 122=12,2\,\%$

V roce 2007 přibylo 12,2% HIV pozitivních.
Počet nemocných v roce:
začátek 2008 … $1000\cdot 1,122$
začátek 2009 … $(1000\cdot 1,122)\cdot 1,122$
po x letech … $1000\cdot 1,122^x$
do počátku roku 2015 uplyne od počátku roku 2007 8 let
počet nakažených na počátku roku 2015 … $1000\cdot 1,122^8=2512$ osob
do počátku roku 2050 uplyne od počátku roku 2007 43 let
počet nakažených na počátku roku 2050 … $1000\cdot 1,122^{43}=141154$ osob
Pokud se bude nemoc šířit stejným tempem zvýší se počet nakažených do počátku roku 2015 na 2512 osob do počátku roku 2050 na 141154 osob.

Dodatek: Příklad pochází z roku 2008. K počátku roku 2015 bylo v ČR prokázáno celkem 2354 nakažených (tedy jen o 158 méně než v předpovědi z příkladu).

Exponenciální prognóza šíření nemoci tedy není zcela přesná, ale i po osmi letech dává odpovídající výsledky. Některým žákům se nezdá ani počet předvídaný na rok 2050 příliš vysoký (přibližně jeden člověk ze sta). V takovém případě je dobré si uvědomit, že léčení nemocných vyžaduje značné náklady (v roce 2015 se uvádělo mezi 300 000 a 500 000 Kč na jednoho nemocného).

Shrnutí: Exponenciální růst popisovaný geometrickou posloupností s kvocientem větším než 1 je čím dál rychlejší a proto dlouhodobě neudržitelný.